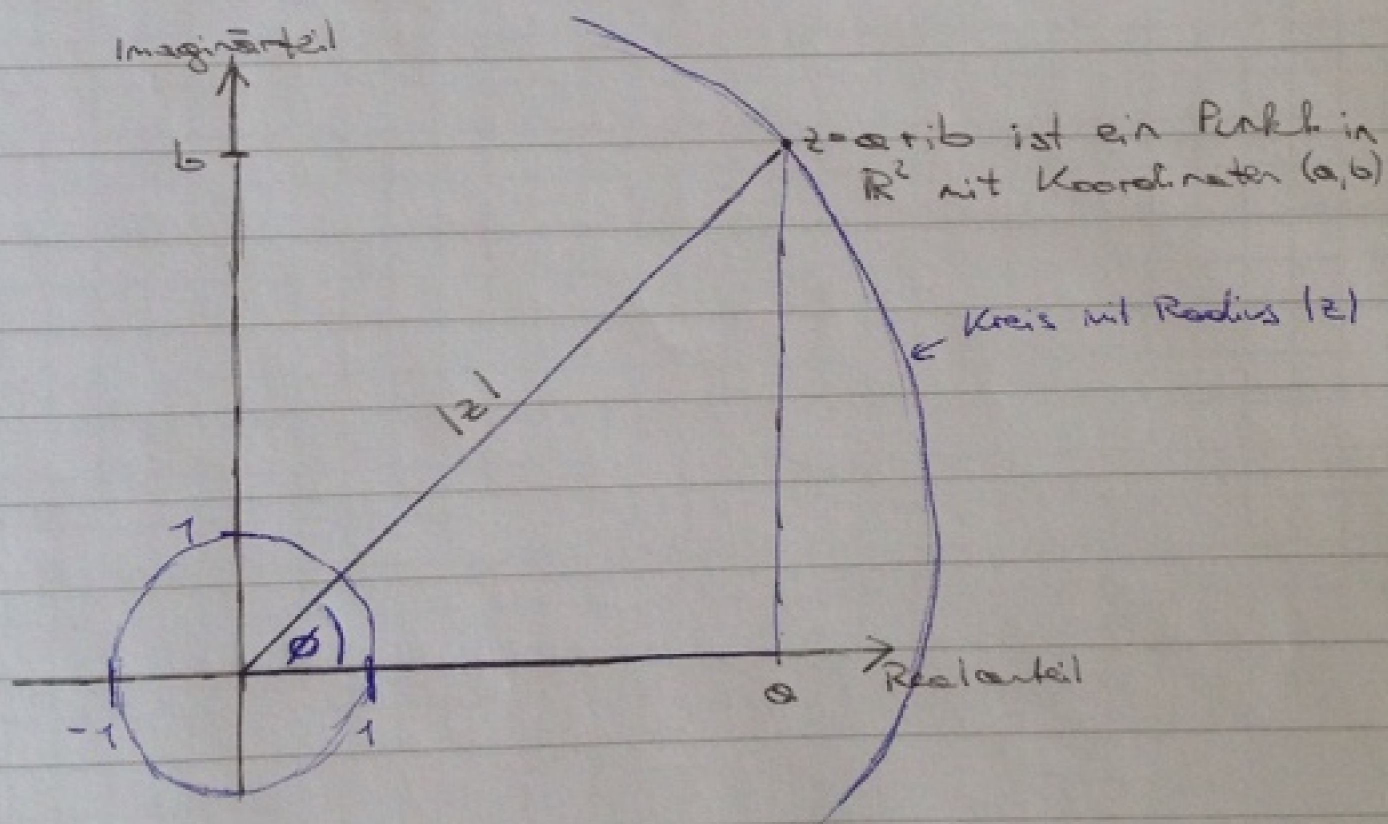
Beispiele: Komplexe Zahlen und trig. Funktionen

$\mathbb{C} = \{z = a+ib : a,b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$

Proposition: Für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ absolut und die Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = e^z$ ist stetig auf $\mathbb{C}$. Es gilt $e^{z+w} = e^z \cdot e^w \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$.

Beweis: Wie bei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x$ denn $|z| \in \mathbb{R}$ und man untersucht $\underbrace{e^{|z|}}_{\in \mathbb{R}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!}$

Graphische Interpretation



$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \in \mathbb{R}$ (vgl. mit $z = a+i\cdot 0 \in \mathbb{R}, |z| = \sqrt{a^2}$)

der Abstand zwischen (a,b) und $(0,0)$

ϕ heißt das Argument von z

$\phi = \arg(z), \phi \in [0, 2\pi)$

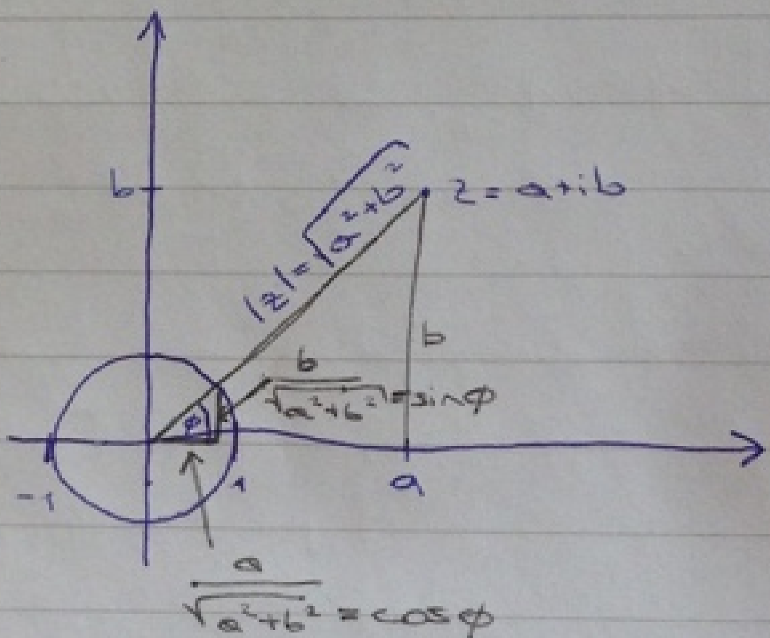
Es gilt $a = \cos\phi \cdot \sqrt{a^2+b^2}$, $b = \sin\phi \cdot \sqrt{a^2+b^2}$

$\left(\cos\phi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right.$

$\left.\sin\phi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

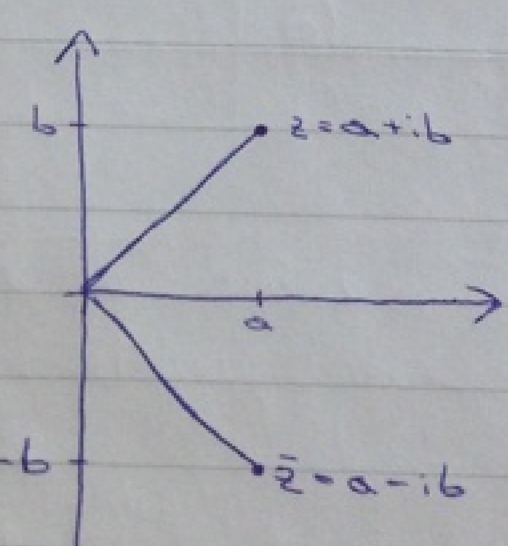
Damit $z = \underbrace{a+ib}_{\text{Kartesische Darstellung v. } z} = \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\phi + i\cdot\sin\phi) = \underbrace{|z|\,(\cos\phi + i\cdot\sin\phi)}_{\text{Polardarstellung von } z}$

Polarkoordinaten (a,b) $\begin{cases} a = |z|\cdot\cos\phi \\ b = |z|\cdot\sin\phi, \ \phi \in [0, 2\pi) \end{cases}$



Wegen $|z|^2 = a^2+b^2 \underset{\text{Bin. Lehrsatz } i^2=-1}{=} (a+i\cdot b)(a-i\cdot b) = z\cdot\bar{z}$

Die komplex konjugierte Zahl $\bar{z} = a-ib$ von z



Afg 7.1

Da $|\underbrace{e^{ix}}_{\in\mathbb{C}}|^2 = e^{ix} \cdot \underbrace{\overline{e^{ix}}}_{=e^{-ix}} = 1, \; x \in \mathbb{R}, \; i = \sqrt{-1}$

$\Rightarrow e^{ix}$ liegt auf dem Einheitskreis ($|e^{ix}| = 1$)

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \underbrace{1}_{k=0} + \underbrace{\frac{ix}{1!}}_{k=1} - \underbrace{\frac{x^2}{2!}}_{k=2} - i \cdot \frac{x^3}{3!} = \qquad \begin{bmatrix} i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = +1 \end{bmatrix}$$

Umordnen ist möglich wegen absoluter Konvergenz

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right)}_{=\cos x} + i \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)}_{=\sin x}$$

(cos ist gerade Funktion mit (0,1))

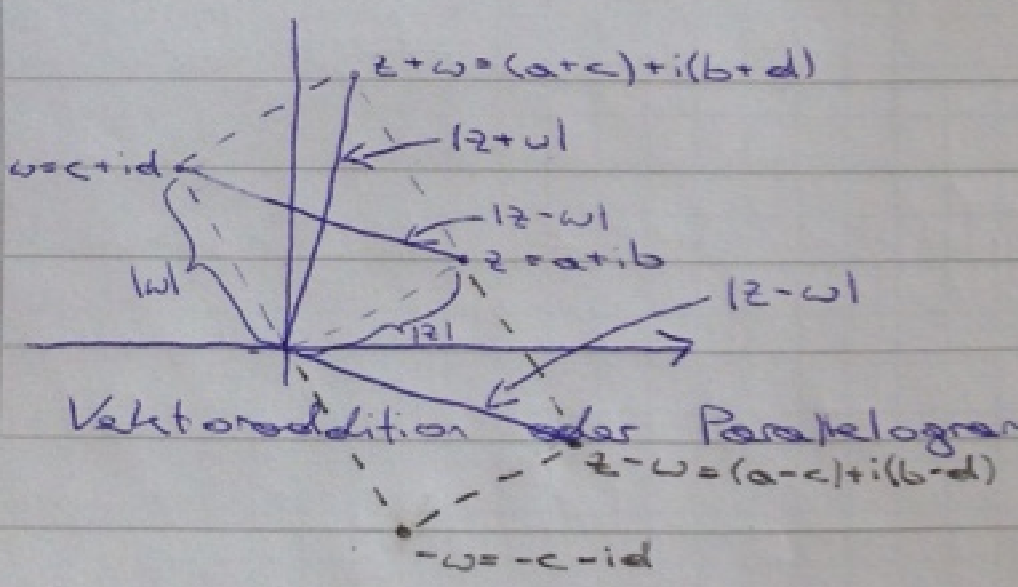
(sin ist ungerade Funktion mit (0,0))

Drei verschiedene Darstellungen von komplexen Zahlen

$$z = a + ib = |z|(\cos\phi + i\sin\phi) = |z| \cdot e^{i\phi}$$

Euler Formel $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$

Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen

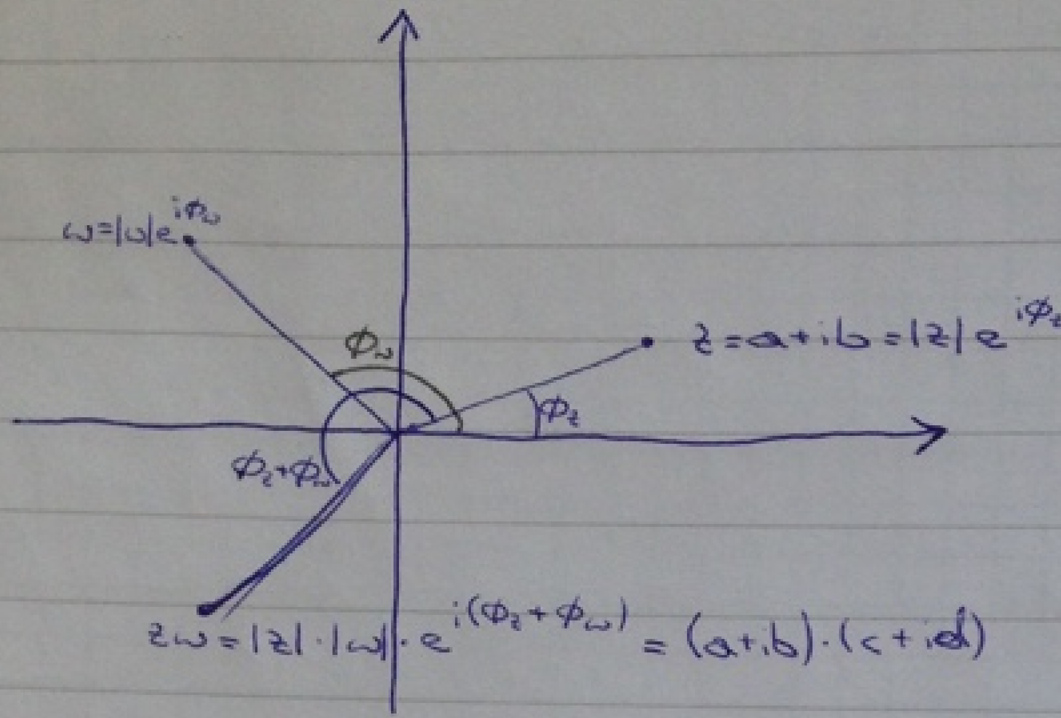


Vektoraddition oder Parallelogrammgesetz

$$|z+\omega|^2 + |z-\omega|^2 = 2\left(|\omega|^2 + |z|^2\right)$$

$$\left(\sqrt{(a+c)^2 + (b+d^2)}\right)^2 + \left(\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}\right)^2 = 2\left(c^2 + d^2 + a^2 + b^2\right)$$

wahr.

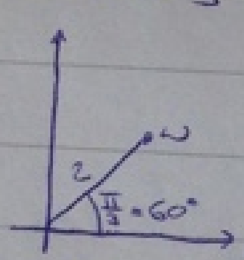


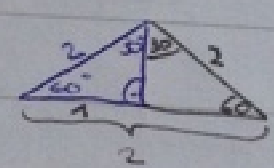
zB $z = 1+i, \quad w = \underbrace{2}_{|w|} \cdot e^{i\overbrace{\pi/3}^{\phi_w}}$ gilt

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

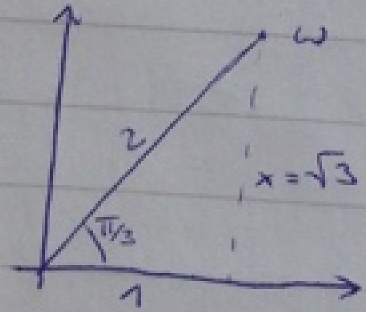
$$z + w = \underbrace{(1+i)}_{a+ib} + \underbrace{(\underbrace{2\cos\tfrac{\pi}{3}}_{c} + i\,\underbrace{2\sin\tfrac{\pi}{3}}_{d})}_{|w|(\cos\phi_w + i\sin\phi_w)}$$

Berechnung von c und d





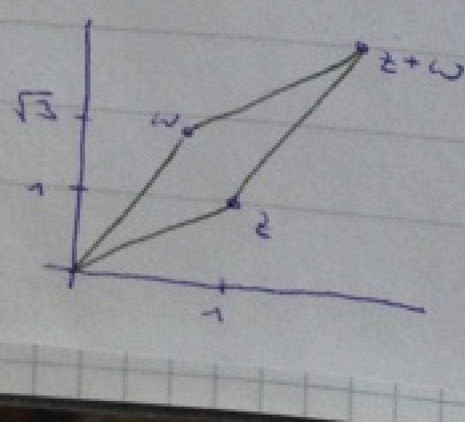
Ergänze um ein 2. gleiches Dreieck, dann haben alle Winkel 60° → alle Seiten gleich lang



$\rightarrow \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$1^2 + x^2 = 2^2$$
$$x^2 = 3$$
$$x = \sqrt{3}$$

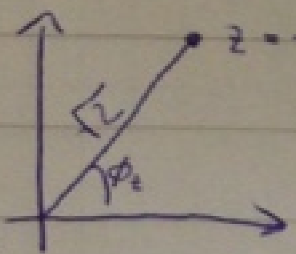
Daraus folgt $z + w = \underbrace{1+i}_{z} + \underbrace{\overbrace{2 \cdot \tfrac{1}{2}}^{2\cos\frac{\pi}{3}} + i \cdot \overbrace{2 \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2}}^{2\sin\frac{\pi}{3}}}_{w} = 2 + i(1+\sqrt{3})$



$$z \cdot w = \underbrace{\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}_{z = |z| e^{i\phi_z}} \cdot 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)} = \underbrace{(1+i)}_{z}\underbrace{(1+i\sqrt{3})}_{w} = (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})$$

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$z = 1 + i = 1 + i \cdot 1$$



$\phi_z = 45°$ $(\pi/4)$ weil $a = b$

$= \sqrt{2}\, e^{i(\pi/4 + 2\pi k)}, k \in \mathbb{Z}$

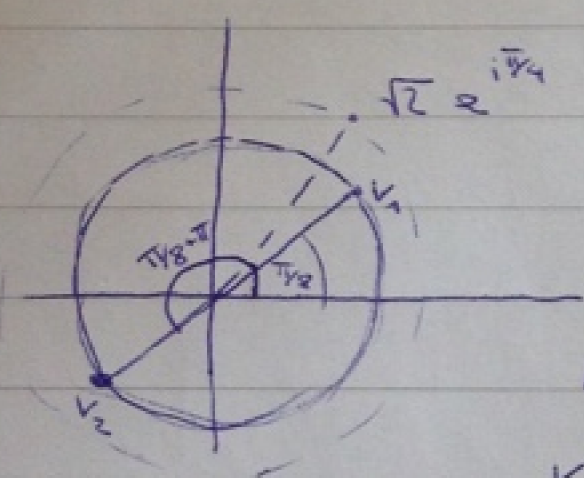
$\cos \phi_z = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin \phi_z = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow \phi_z = \frac{\pi}{4} = 45°$

Löse $v^2 = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}$ nach v auf. (d.h. löse $v^2 - \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4} = 0$ auf; d.h. bestimme d. Nullstellen von $v^2 - \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4} = 0$)

Die Zwei Lösungen sind

$$v_1 = \left(\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}\right)^{1/2} = (\sqrt{2})^{1/2} \left(e^{i\pi/4}\right)^{1/2} = (\sqrt{2})^{1/2} e^{i\pi/8}$$



$$v_2 = (\sqrt{2})^{1/2} \cdot \underbrace{e^{i\left(\pi/8 + \frac{2\pi}{2}\right)}}_{\cos\left(\pi/8 + \frac{2\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{2\pi}{2}\right)}$$

sodass $\cos(\pi/4 + 2\pi) + i\sin(\pi/4 + 2\pi)$

$= \cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4)$

Kontrolle:

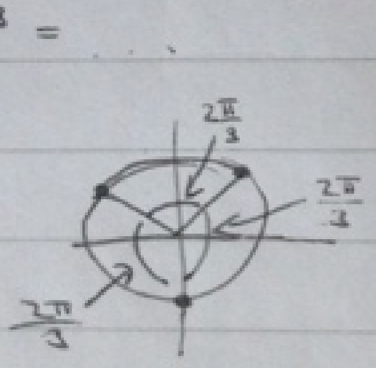
$v_1^2 = \left((\sqrt{2})^{1/2} e^{i\pi/8}\right)^2 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$ (erfüllt $v^2 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$)

$v_2^2 = \left((\sqrt{2})^{1/2} e^{i\left(\pi/8 + \frac{2\pi}{2}\right)}\right)^2 = \sqrt{2}\, e^{i(\pi/4 + 2\pi)} =$

$= \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

$e^{i2\pi} = 1 = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi)$

$v^3 = \ldots$



Trigonometrische Funktionen

Da $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $x \in \mathbb{R}$

und $e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \left(1 - \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^4}{4!} - \dots\right) + i\left(-x - \frac{(-x)^3}{3!} + \frac{(-x)^5}{5!} - \dots\right)$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{2k}}{2k!}(-1)^k + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k =$$

$$= \cos(x) - i\sin(x)$$

$\Rightarrow \left(e^{ix} + e^{-ix} = \cos(x) + i\sin(x) + \cos(x) - i\sin(x) = 2\cos(x)\right) \Leftrightarrow$

$\left(\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right.$ ($\cos(x)$ ist stetig als Summe von zwei stetigen Funktionen))

$\Rightarrow \left(e^{ix} - e^{-ix} = \cos(x) + i\sin(x) - (\cos(x) - i\sin(x)) = 2i\sin(x)\right) \Leftrightarrow$

$\left(\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right.$ ($\sin(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$))

Weitere Eigenschaften

(i) $|e^{ix}|^2 = 1 \Rightarrow e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$, $|e^{ix}| = \sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)}$

(liegt auf Einheitskreis)

$\Rightarrow \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(ii) $\overbrace{e^{i(x+y)}}^{\cos(x+y) + i\sin(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy} = (\cos x + i\sin x) \cdot (\cos y + i\sin y) =$

$= (\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y) + i(\cos x \cdot \sin y + \sin x \cdot \cos y)$

$e^{i(x-y)} = e^{ix} \cdot e^{-iy} = (\cos x \cdot \cos y + \sin x \sin y) + i(-\cos x \cdot \sin y + \sin x \cdot \cos y)$

Folgerung:

$x = \frac{\omega + \omega'}{2}$, $y = \frac{\omega - \omega'}{2}$

$\cos(\underbrace{x+y}_{=\omega}) + \cos(\underbrace{x-y}_{=\omega'}) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y +$

$\cos x \cos y + \sin x \cdot \sin y = 2\cos x \cos y$

$\Leftrightarrow \underbrace{\underbrace{\cos(\omega)}_{\text{Ton d. Frequenz } \omega} + \underbrace{\cos(\omega')}_{\text{Ton d. Frequenz } \omega'}}_{\text{so klingen diese zwei Töne gleichzeitig}} = 2\cos\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega-\omega'}{2}\right)$

= als ein Ton $\cos\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)$ der mittleren Frequenz $\frac{\omega+\omega'}{2}$ mit der Amplitude $2\cos\left(\frac{\omega-\omega'}{2}\right)$

(iii) $\cos(x+2\pi) + i\sin(x+2\pi) = e^{i(x+2\pi)} = e^{ix} \cdot \underbrace{e^{i2\pi}}_{\underbrace{\cos(2\pi)}_{1} + \underbrace{i\sin(2\pi)}_{0} = 1} =$

$= e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$

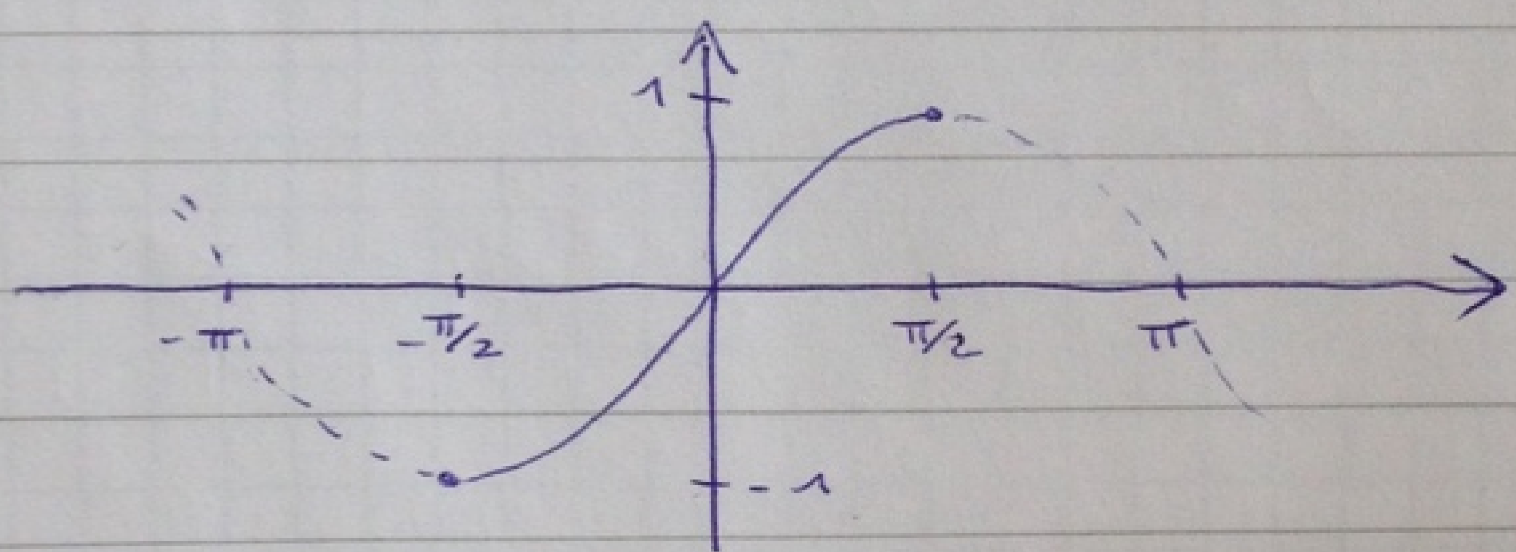
($\cos(x)$ und $\sin(x)$ sind 2π-periodisch)

(iv) Konstanten i, e, π:

$$e^{i\pi} = -1 = \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + \underbrace{i\sin(\pi)}_{=0}$$

(v) $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}(2k+1) : k \in \mathbb{Z}\}$

$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi \cdot \mathbb{Z}\}$



$f(x) = \sin(x)$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

ist streng monoton wachsend und stetig